Journal of Engineering Mathematics, Vol. 11, No. 3, July 1977
Noordhoff International Publishing–Leyden
Printed in The Netherlands

Sur une formulation rigoureuse du problème de la convection libre atmosphérique

R. KH. ZEYTOUNIAN

U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Lille I, France

(Received October 20, 1975)

SUMMARY

The method of matched asymptotic expansions is used here to analyse unsteady free convection of a fluid in the vicinity of a flat wall induced by a temperature difference between the wall and the fluid.

This analysis allows one to obtain in a rational manner an asymptotic model for the free convection in the atmosphere.

We start from the complete Navier–Stokes equations for a heavy, compressible viscous fluid in rotation, and the corresponding initial and boundary conditions.

With a proper choice of non-dimensional quantities, the Navier–Stokes equations depend, in particular, on the Grashof (Gr), Strouhal (S) and Rossby (Ro) numbers. The boundary condition for the temperature on the wall include the parameter τ_0 (similar to the Eckert number). It is assumed that τ_0 and $\varepsilon_0 \equiv Gr^{-1/2}$ are simultaneously very small (as indeed is the case for atmospheric problems) and satisfy the similarity relation $\tau_0 = \varepsilon_0^{\nu}$, with $\nu > 0$ a real number to be determined. Two types of inner degeneracies occur corresponding to the values $\nu = 1$ and $\nu = {}^2/_5$; the former yield linear equations and the latter, under the assumptions $S = \lambda_0 \varepsilon_0^{1/5}$ and $Ro = \Sigma_0 \varepsilon_0^{-1/5}$, yield non linear equations. The two outer degeneracies give the trivial zero solution which determine the behaviour of the inner asymptotic representations far from the wall.

It is of interest to note that this method allows one to determine the exact form of the inner and outer asymptotic representations and leaves the opportunity, if necessary, of going beyond the limiting equations obtained here.

Lastly, the asymptotic theory presented here, permits one, to obtain not only the classical free atmospheric convection equations but also to define the limits of validity of the approximations through which the equations are obtained.

1. Introduction

On considère, pour un fluide pesant compressible, supposé être un gaz parfait à chaleurs spécifiques C_p et C_v constantes ($\gamma = C_p/C_v$, $R \equiv C_p(\gamma - 1)/\gamma$), le problème classique de la convection libre instationnaire au voisinage d'une paroi plane rigide fixe, provenant d'une différence de température paroi-fluide [1].

Le repère de travail $0xyz$ est lié au plan normal à la force de la pesanteur $\boldsymbol{g}$, les axes $0x$, $0y$ et $0z$ étant orientés Est, Nord et Zenith; u, v, w désignent les composantes de la vitesse, p la pression, ρ la masse volumique, T la température, $\mu_0 =$ Const le coefficient de viscosité (on fait l'hypothèse usuelle de Stokes) et $k_0 =$ Const le coefficient de conduction. Enfin, on prend en compte la force de Coriolis en supposant que le paramètre, $l_0 = 2\Omega_0 \sin \psi_0$ est constant (Ω_0 est la vitesse angulaire de rotation de la Terre et ψ_0 la latitude).

La convection libre instationnaire a lieu dans l'espace-temps

$E^4 : \{t^* \geqq 0, \; -\infty < x, y > +\infty, \; z \geqq 0\};$

sur la paroi $z = 0$ on s'impose un champ thermique:

$$T = T_\infty^0 + \Delta T_0 \Theta(t^*, x, y), \tag{1}$$

lorsque, $t^* > 0$ et $x, y \subset D_2^*$, où D_2^* est un domaine borné du plan $z = 0$, ainsi que la condition d'adhérence:

$$u = v = w = 0. \tag{2}$$

Pour $t^* = 0$ et à l'infini on admet que:

$$u = v = w = 0, \quad T = T_\infty^*(z), \quad p = p_\infty^*(z), \quad \rho = \rho_\infty^*(z), \tag{3}$$

où T_∞^*, p_∞^* et ρ_∞^* satisfont aux relations:

$$\frac{dp_\infty^*}{dz} + \rho_\infty^* g = 0, \quad p_\infty^* = R\rho_\infty^* T_\infty^*, \quad \frac{d^2 T_\infty^*}{dz^2} = 0 \Rightarrow -\frac{dT_\infty^*}{dz} \equiv \Gamma_\infty^0 = \text{Const.} \tag{4}$$

Naturellement, on a les conditions de compatibilité:

$$\Theta(0, x, y) \equiv 0, \quad T_\infty^0 \equiv T_\infty^*(0), \quad p_\infty^0 \equiv p_\infty^*(0), \quad \rho_\infty^0 \equiv \rho_\infty^*(0). \tag{5}$$

2. Problème réduit

On considère les équations de Navier–Stokes complètes dans lesquelles on pose, tout d'abord [2], [3],

$$p = p_\infty^*(1 + \pi), \quad \rho = \rho_\infty^*(1 + \omega), \quad T = T_\infty^*(1 + \theta). \tag{6}$$

Puis on définit une vitesse caractéristique [1]:

$$U_0 = \left(g L_0 \frac{\Delta T_0}{T_\infty^0}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

avec L_0, une échelle de longueur caractéristique liée au domaine D_2^* et on désigne par t_0 le laps de temps caractéristique du phénomène de convection considéré.

Si l'on introduit alors les variables et fonctions sans dimensions:

$$\left.\begin{aligned} &t = \frac{t^*}{t_0}, \quad x_1 = \frac{x}{L_0}, \quad x_2 = \frac{y}{L_0}, \quad x_3 = \frac{z}{L_0} \\ &v_1 = \frac{u}{U_0}, \quad v_2 = \frac{v}{U_0}, \quad v_3 = \frac{w}{U_0}, \\ &T_\infty = \frac{T_\infty^*}{T_\infty^0}, \quad p_\infty = \frac{p_\infty^*}{p_\infty^0}, \quad \rho_\infty = \frac{\rho_\infty^*}{\rho_\infty^0}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

on obtient dans les variables réduites, t, x_i, pour les fonctions réduites, v_i, π, ω et θ les équations réduites suivantes [4]:

$$\pi = \omega + \theta + \omega\theta; \tag{9a}$$

$$S\frac{\partial\omega}{\partial t}+v_k\frac{\partial\omega}{\partial x_k}+(1+\omega)\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}+\frac{A_0-B_0}{T_\infty}v_3\right)=0; \tag{9b}$$

$$(1+\omega)\left\{S\frac{\partial v_\alpha}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_k}+\frac{1}{Ro}[(\alpha-2)(v_2-\operatorname{tg}\psi_0^{-1}v_3)+(\alpha-1)v_1]\right\}$$
$$=-\frac{T_\infty}{B_0\tau_0}\frac{\partial\pi}{\partial x_\alpha}+\frac{Gr^{-\frac{1}{2}}}{\rho_\infty}\left\{\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x_k^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)\right\},\quad (\alpha=1,2); \tag{9c}$$

$$(1+\omega)\left\{S\frac{\partial v_3}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_3}{\partial x_k}-\frac{\operatorname{tg}\psi_0^{-1}}{Ro}v_1\right\}$$
$$=-\frac{T_\infty}{B_0\tau_0}\frac{\partial\pi}{\partial x_3}+\frac{1+\omega}{\tau_0}\theta+\frac{Gr^{-\frac{1}{2}}}{\rho_\infty}\left\{\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_k^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)\right\}; \tag{9d}$$

$$(1+\omega)\left(S\frac{\partial\theta}{\partial t}+v_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\right)-\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(S\frac{\partial\pi}{\partial t}+v_k\frac{\partial\pi}{\partial x_k}\right)+(1+\pi)\eta_0\frac{v_3}{T_\infty}$$
$$=\frac{Gr^{-\frac{1}{2}}}{Pr\,\rho_\infty}\left\{\frac{\partial^2\theta}{\partial x_k^2}-2\frac{A_0}{T_\infty}\frac{\partial\theta}{\partial x_3}+\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{Pr\,B_0\tau_0}{T_\infty}\Phi\right\}, \tag{9e}$$

où

$$\Phi=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)^2,\quad (i,k=1,2,3).$$

Au système réduit (9) il faut associer les conditions aux limites et initiales suivantes:

$$x_3=0:\ \theta=\tau_0\Theta(t,x_1,x_2),\quad t>0,\ x_1,x_2\subset D_2,\ v_k=0; \tag{10a}$$

$t=0$ et à l'infini:

$$v_k=0,\quad \pi=\theta=\omega=0. \tag{10b}$$

Dans le problème réduit (9)–(10) s'introduisent les paramètres sans-dimensions:

$$A_0=L_0/(T_\infty^0/\Gamma_\infty^0);\quad B_0=L_0/(RT_\infty^0/g);\quad S=L_0/(t_0U_0);$$
$$Ro=\frac{U_0}{l_0L_0};\quad Gr=\frac{gL_0^3\Delta T_0}{(\mu_0/\rho_\infty^0)^2T_\infty^0};\quad Pr=\frac{\mu_0c_p}{k_0} \tag{11}$$
$$\eta_0=\frac{\gamma-1}{\gamma}B_0-A_0;\quad \tau_0=\frac{\Delta T_0}{T_\infty^0}.$$

3. Structure asymptotique du problème réduit

Nous voulons maintenant analyser la structure asymptotique de la convection libre instationnaire au voisinage du plan $x_3=0$, lorsque τ_0 est très petit et Gr est très grand:

$$\frac{(\mu_0/L_0\rho_\infty^0)^2}{RB_0}\ll\Delta T_0\ll T_\infty^0. \tag{12}$$

De manière précise, on admet que, τ_0 *et* $\varepsilon_0 \equiv Gr^{-\frac{1}{2}}$ *sont simultanément très petits; mais il faut les comparer et l'analyse qui suit suppose que:*

$$\tau_0 = \varepsilon_0^{\nu}, \tag{13}$$

avec $\nu > 0$, un nombre réel à déterminer.

Comme dans le cas classique des écoulements à grand nombre de Reynolds il faut rechercher deuxre présentations asymptotiques différentes (valables dans des domaines distincts de E^4) et associées à des dégénérescences significatives [5] du problème réduit (9)–(10).

Pour cela considérons la dégénérescences associée au changement d'échelle

$$x_3 = \varepsilon_0^{\alpha}\tilde{x}_3 \tag{14}$$

et à la représentation asymptotique

$$\begin{aligned} v_1 &= \varepsilon_0^{\beta}\tilde{u} + \ldots, \quad & v_2 &= \varepsilon_0^{\beta}\tilde{v} + \ldots, \quad & v_3 &= \varepsilon_0^{\gamma}\tilde{w} + \ldots, \\ \pi &= \varepsilon_0^{\sigma}\tilde{\pi} + \ldots, \quad & \theta &= \varepsilon_0^{\psi}\tilde{\theta} + \ldots, \quad & \omega &= \varepsilon_0^{\psi}\tilde{\omega} + \ldots, \end{aligned} \tag{15}$$

les autres variables t, x_1, x_2 étant inchangées. Les nombres α, β, γ, σ et ψ sont des réels $\geqq 0$ à déterminer de telle façon que la dégénérescence considérée soit significative.

3.1. *Première dégénérescence intérieure (linéaire)*

Plaçons-nous dans le cas de $\alpha > 0$ et supposons que les paramètres B_0, S, Ro, η_0 et Pr sont de l'ordre de l'unité. Sous ces hypothèses on obtient une première dégénérescence (intérieure) significative si:

$$\gamma = \nu = \psi, \quad \sigma = \nu + \beta, \quad \gamma - \beta = \alpha = \tfrac{1}{2}, \quad \alpha = \beta,$$

ce qui donne

$$\alpha = \beta = \tfrac{1}{2}, \quad \gamma = \psi = \nu = 1 \quad \text{et} \quad \sigma = \tfrac{3}{2}. \tag{16}$$

On obtient alors les équations linéaires suivantes, pour $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$, $\tilde{\pi}$, $\tilde{\theta}$, et $\tilde{\omega}$,

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\omega} = -\tilde{\theta}; \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}_3} = 0; \\ &S\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \frac{1}{Ro}\tilde{v} = -\frac{1}{B_0}\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_3^2}; \\ &S\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{1}{Ro}\tilde{u} = -\frac{1}{B_0}\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_3^2}; \\ &\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial \tilde{x}_3} = B_0\tilde{\theta}; \quad S\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \eta_0\tilde{w} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}_3^2}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

3.2. *Seconde dégénérescence intérieure (non linéaire)*

Conservons l'hypothèse que $\alpha > 0$, mais supposons maintenant que les paramètres S et Ro^{-1} tendent vers zéro, avec $\varepsilon_0 \to 0$; de manière précise supposons que:

$$S = \lambda_0 \varepsilon_0^{\Psi} \quad \text{et} \quad Ro = \Sigma_0 \varepsilon_0^{-\chi}, \tag{18}$$

avec Ψ et χ des réels > 0 à déterminer.

Dans ce cas, on peut se convaincre que la dégénérescence (intérieure) est significative, que si l'on a les conditions

$$\alpha = \nu = \psi, \quad \Psi = \chi = \beta, \quad \gamma - \psi = \beta, \quad \alpha = 2\beta, \quad 1 - 2\alpha = \beta,$$

d'où il découle que

$$\Psi = \chi = \beta = \tfrac{1}{5}, \quad \alpha = \nu = \psi = \tfrac{2}{5}, \quad \gamma = \tfrac{3}{5}, \quad \sigma = \tfrac{4}{5}. \tag{19}$$

On obtient ainsi les équations non linéaires:

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\omega} = -\tilde{\theta}; \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}_3} = 0;\\
&\lambda_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} + \tilde{w}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_3} - \frac{1}{\Sigma_0}\tilde{v} = -\frac{1}{B_0}\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_3^2};\\
&\lambda_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_1} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_2} + \tilde{w}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{1}{\Sigma_0}\tilde{u} = -\frac{1}{B_0}\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_3^2}.\\
&\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial \tilde{x}_3} = B_0\tilde{\theta}; \quad \lambda_0 \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_1} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_2} + \tilde{w}\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}_3} + \eta_0 \tilde{w} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}_3^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

La paroi $\tilde{x}_3 = 0$ étant dans le domaine de validité des dégénérescences intérieures nous devons associer aux systèmes limites intérieures (17) et (20) les conditions suivantes:

$$\tilde{x}_3 = 0{:}\ \tilde{\theta} = \Theta(t, x_1, x_2), \quad t > 0, \ x_1, x_2 \subset D_2, \ \tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{w} = 0; \tag{21a}$$

$$t = 0{:}\ \tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{\theta} = \tilde{\omega} = 0; \tag{21b}$$

$$|x_1| \to \infty, \ |x_2| \to \infty{:}\ \tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{w} = \tilde{\theta} = \tilde{\omega} = \tilde{\pi} \to 0. \tag{21c}$$

3.3. *Dégénérescences extérieures*

Considérons maintenant le cas où $\alpha = 0$. On constate alors que aussi bien le choix:

$$\beta = \tfrac{1}{2}, \quad \gamma = \psi = \nu = 1, \quad \sigma = \tfrac{3}{2},$$

avec S et Ro de l'ordre de l'unité, que le choix:

$$\beta = \tfrac{1}{5}, \quad \psi = \nu = \tfrac{2}{5}, \quad \gamma = \tfrac{3}{5}, \quad \sigma = \tfrac{4}{5},$$

lorsque $S = \lambda_0 \varepsilon_0^{\frac{1}{5}}$ et $Ro = \Sigma_0 \varepsilon_0^{-\frac{1}{5}}$, conduisent à partir de l'équation (9d) à

$$\tilde{\theta}_0 \equiv 0, \tag{22}$$

lorsque $\varepsilon_0 \to 0$.

De ce fait, l'équation (9e), sous l'hypothèse que $\eta_0 \neq 0$ $[(\gamma - 1)/\gamma \neq (R/g)\Gamma_\infty^0]$, se réduit à

$$\tilde{w}_0 \equiv 0. \tag{23}$$

Ainsi, les dégénérescences extérieurs conduisent aux équations d'un fluide parfait incompressible en écoulement instationnaire bidimensionnel dans le plan x_1, x_2, lorsque $\varepsilon_0 \to 0$.

Si l'on introduit la fonction de courant plan $\tilde{\psi}_0(t, x_1, x_2)$ telle que

$$\tilde{u}_0 = -\frac{\partial \tilde{\psi}_0}{\partial x_2}, \quad \tilde{v}_0 = \frac{\partial \tilde{\psi}_0}{\partial x_1}, \tag{24}$$

on obtiendra respectivement les équations suivantes:

(i) *Cas linéaire:*

$$S\frac{\partial}{\partial t}\Delta_2 \tilde{\psi}_0 = 0, \quad \Delta_2 \tilde{\pi}_0 = \frac{B_0}{Ro}\Delta_2 \tilde{\psi}_0; \tag{25}$$

(ii): *Cas non-linéaire:*

$$\begin{aligned} &\left(\lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\psi}_0}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial \tilde{\psi}_0}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\Delta_2 \tilde{\psi}_0 = 0;\\ &\Delta_2 \tilde{\pi}_0 = \frac{B_0}{\Sigma_0}\Delta_2 \tilde{\psi}_0 + 2B_0\left\{\frac{\partial^2 \tilde{\psi}_0}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \tilde{\psi}_0}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \tilde{\psi}_0}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right\}, \end{aligned} \tag{26}$$

où

$$\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Les conditions:

$$\begin{aligned} &t = 0: \ \tilde{\psi}_0 = 0;\\ &|x_1| \to \infty, \ |x_2| \to \infty: \quad \tilde{\psi}_0 = \tilde{\pi}_0 \to 0, \end{aligned} \tag{27}$$

entraînent

$$\begin{aligned} &\Delta_2 \tilde{\psi}_0 = 0 \Rightarrow \tilde{\psi}_0 \equiv 0 \Rightarrow \tilde{u}_0 = \tilde{v}_0 \equiv 0,\\ &\Delta_2 \tilde{\pi}_0 = 0 \Rightarrow \tilde{\pi}_0 \equiv 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Ainsi, *les deux dégénérescences extérieures, liées à la valeur* $\alpha = 0$, *conduisent à la solution extérieure triviale*

$$\tilde{u}_0 = \tilde{v}_0 = \tilde{w}_0 = \tilde{\theta}_0 = \tilde{\pi}_0 = \tilde{\omega}_0 \equiv 0, \tag{29}$$

lorsque $\varepsilon_0 \to 0$ *et ce à condition que* $\eta_0 \neq 0$.

En raccordant les représentations asymptotiques extérieure ($\alpha = 0$) et intérieure ($\alpha > 0$) l'on trouve que cette dernière doit se comporter, loin de la paroi $\tilde{x}_3 = 0$, comme suit:

$$\tilde{x}_3 \to +\infty: \ \tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{\theta} = \tilde{\omega} = \tilde{\pi} \to 0. \tag{30}$$

Il est facile de se convaincre que l'ordre des systèmes limites intérieures (17) et (20) en $\tilde{x}_3$ ne permet pas d'imposer de condition sur $\tilde{w}$, lorsque $\tilde{x}_3 \to +\infty$; en fait, l'équation pour la perturbation $\tilde{\theta}$ dans les systèmes (17) et (20) montre que, lorsque $\eta_0 \neq 0$,

$$\lim_{\tilde{x}_3 \to +\infty} \tilde{\theta} = 0 \Rightarrow \tilde{w} = 0, \text{ pur } \tilde{x}_3 = +\infty, \tag{31}$$

ce qui est bien en accord avec (23).

4. Conclusion

Il faut bien comprendre que le système limite intérieur (20) n'est pas celui de la couche limite classique de Prandtl; *le problème* (20), (21), (30) *avec la contrainte* (31) *est celui qui décrit, en météorologie, les circulations locales au-dessus d'un site plat sans relief mais ayant des hétérogénéités thermiques;* ce sont les phénomènes de brises qui sont caractérisés par les contrastes de température au sol.

En particulier, la présence du terme $\eta_0 \tilde{w}$ dans l'équation pour la perturbation $\tilde{\theta}$ entraîne, lorsque $\eta_0 > 0$, la formation d'une brise compensatrice (antibrise) au-dessus de la brise principale.

L'une des difficulté pour résoudre ce problème de brise est liée justement à la présence de ce terme $\eta_0 \tilde{w}$ dans l'équation pour $\tilde{\theta}$ au niveau du système d'équations (20); de ce fait le système d'équation (20) est fortement couplé. Mais c'est seulement en tenant compte *correctement* de ce terme $\eta_0 \tilde{w}$ que l'on pourra choisir une solution du problème de brise satisfaisant à la contrainte (31) (voir à ce sujet [6]).

Nous espérons, dans un prochain article, montrer comment l'on peut obtenir la solution du problème (20), (21), (30), sous la contrainte (31).

REFERENCES

[1] S. Ostrach, Laminar flows with body forces, *Theory of Laminar Flows* (ed. F. K. Moore), section F, 528, Princeton University Press (1964).

[2] R. Kh. Zeytounian, A rigorous derivation of the equations of compressible viscous fluid motion with gravity at low Mach number, *Archives of Mechanics*, 26, 3 (1974) 499–510.

[3] R. Kh. Zeytounian, Notes sur les Ecoulements Rotationnels de Fluides Parfaits, chapitre VII, *Lecture Notes in Physics*, V. 27, Springer-Verlag (1974). (See, also, *Fluid Dynamics Transactions*, 8 (Warszawa, 1976) 289–352).

[4] R. Kh. Zeytounian, La Météorologie du point de vue du Mécanicien des Fluides, §. VII, *Survey Lecture prepared for XIIth Symposium on Advanced Problems and Methods in Fluid Mechanics* (Bialowieza, 8–13 septembre 1975), *IPPT reports Polskiej Akademii Nauk* (1975).

[5] W. Eckhaus, *Matched Asymptotic Expansions and Singular Perturbations*, North-Holland (1973).

[6] L. N. Gutman, *Vevedenye ve nelineynouyou teoriyou mezometeorologuitcheskikh protsessov*, chapitre 7, Guidrométéoizdat, Leningrad (1969).